ДОСТОВЕРНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ И ИХ КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

к. т. н., с. н. с. В.Ю. Дубницкий,
к. т. н, доцент Кобылин А.М.,
научн.сотр. Скорикова И.Г.

План

- Концепция достоверных вычислений;
- Системы аксиом интервальной математики;
- Концепция разработки программного обеспечения для реализации достоверных вычислений;
- Особенности разработки мобильных приложений для Windows Phone
- Применение концепции достоверных вычислений для оценки деятельности коммерческих банков

Концепция достоверных вычислений

Попытки построить для каждого численного метода аналитическую зависимость погрешности результата от погрешностей исходных данных и округлений. не достигли намеченной цели. В качестве причин неудачи можно указать следующие:

- вычисления по формулам, связывающим погрешность исходных данных с погрешностью результата, сами неизбежно производятся с погрешностью;
- в них должны учитываться особенности системы команд того конкретного процессора, на котором будет происходить вычисление, что не позволяет применить эти формулы для любой платформы;
- в них невозможно учесть индивидуальную точность операндов — отсюда грубость оценки конечного результата и т. д.

При замене точного значения одним приближенным не гарантируется, вообще говоря, корректность проверки числовых соотношений: если в программе имеется, например, оператор

if x < 0 then A else B,

а *x* вычисляется приближенно, то никогда нельзя быть уверенным в правильности ветвления, поскольку, скажем, вычисленное значение 0.013 может заменять точное значение x, равное −0.02.

Причины появления интервального анализа

Интервальный анализ как научное направление сформировался относительно недавно, в основном как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ, обусловленный тем, что во многих вычислительных задачах возникла потребность не только вычисления приближенных решений, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям. Ценность интервальных решений заключается в том, что они в целом позволяют получать наиболее достоверные решения исходных задач, учитывающие возможные диапазоны изменения исходных и вычисляемых значений.

В 2006 р. в Україні був введений в дію **ДСТУ-Н РМГ 43-2006 "Застосування «Настанови з оцінювання невизначеності у вимірюванні» .**

В соответствии с этим документом неопределённость вычислений, возникающая в результате округлений относится к неопределённости типа Б-нестатистической неопределённости.

Системы аксиом интервальной арифметики

Классическая система аксиом

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\left[\underline{a};\overline{a}\right]+\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\underline{a}+\underline{b};\overline{a}+\overline{b}\right];$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\left[\underline{a};\overline{a}\right]-\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\underline{a}-\overline{b};\overline{a}-\underline{b}\right];$$

$$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}=\left[\underline{a};\overline{a}\right]*\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\min\left\{\underline{a}\cdot\underline{b},\underline{a}\cdot\overline{b},\overline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}\right\},\max\left\{\underline{\mathrm{a}}\cdot\underline{b},\underline{a}\cdot\overline{b},\overline{a}\cdot\underline{b},\overline{a}\cdot\overline{b}\right\}\right];$$

$$\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B}=\left[\underline{a};\overline{a}\right]/\left[\underline{b};\overline{b}\right]=\left[\underline{a},\overline{a}\right]*\left[1/\overline{\mathrm{b}},1/\underline{b}\right];\quad 0\notin\boldsymbol{b}$$

Определение интервального умножения в виде так называемой таблицы Кэли [7]

Для этого выделим в *IR* следующие подмножества:

$$P := \{a \in IR \mid \underline{a} \geq 0 \text{ и } \overline{a} \geq 0\} \text{- неотрицательные интервалы}$$

$$Z := \{a \in IR \mid \underline{a} \leq 0 \, \overline{\mathrm{a}}\} \text{- нульсодержащие интервалы}$$

$$-P := \{a \in IR \mid -a \in P\} \text{- неположительные интервалы}$$

при умножении интервала на число существует правило:

$$\mu \cdot \boldsymbol{a} = \begin{cases} [\mu \underline{\boldsymbol{a}}, \mu \overline{\boldsymbol{a}}], & \text{если } \mu \geq 0 \\ [\mu \overline{\boldsymbol{a}}, \mu \underline{\boldsymbol{a}}], & \text{если } \mu < 0 \end{cases}$$

Интервальное умножение-таблица Кели

	$b \in P$	$b \in Z$	$b \in -P$
$a \in P$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$a \in Z$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$
$a \in -P$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$

Система Каухера

Определение 1 Абсолютной величиной (модулем) интервала ***a*** называется величина

$$|\boldsymbol{a}| = \max\{|\underline{\boldsymbol{a}}|, |\overline{\boldsymbol{a}}|\}.$$

Операция

$$\operatorname{dual} \boldsymbol{a} := [\overline{\boldsymbol{a}}, \underline{\boldsymbol{a}}]$$

Правильной проекцией интервала ***a*** называется величина

$$\operatorname{pro} \boldsymbol{a} := \begin{cases} \boldsymbol{a}, & \text{если } \boldsymbol{a} \text{ - правильный,} \\ \operatorname{dual} \boldsymbol{a}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично классической интервальной арифметике ***IR*** отношение включения одного интервала в другой определяется в ***KR*** следующим образом:

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \underline{\boldsymbol{a}} \geq \underline{\boldsymbol{b}} \quad \text{и} \quad \overline{\boldsymbol{a}} \leq \overline{\boldsymbol{b}}$$

$\leq$

Определение 2

Для интервалов ***a, b*** $\in$ ***KR*** условимся считать, что ***a*** не превосходит ***b*** и писать ***a*** $\leq$ ***b*** тогда и только тогда, когда $\underline{\mathbf{a}} \leq \underline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{a}} \leq \overline{\mathbf{b}}$

Интервал называется неотрицательным, т.е. «$\geq \mathbf{0}$», если неотрицательны оба его конца.

Интервал называется неположительным, т.е. «$\leq \mathbf{0}$», если неположительны оба его конца

Сложение

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}:=\left[\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}\right]$$

Операция

$$\operatorname{opp}\boldsymbol{a}:=\left[-\underline{\boldsymbol{a}},-\overline{\boldsymbol{a}}\right].$$

Операцию, обратную сложению, так называемое внутреннее (алгебраическое) вычитание в ***KR***, обозначим $\oplus$, так что

$$\boldsymbol{a}\oplus\boldsymbol{b}:=\boldsymbol{a}+\operatorname{opp}\boldsymbol{b}=\left[\underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}},\overline{\boldsymbol{a}}-\overline{\boldsymbol{b}}\right].$$

Для того чтобы выписать явные формулы для умножения в полной интервальной арифметике, выделим в ***KR*** следующие подмножества:

$\boldsymbol{P} := \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid (\underline{\boldsymbol{a}} \geq 0) \,\&\, (\overline{\boldsymbol{a}} \geq 0)\}$ – неотрицательные интервалы

$\boldsymbol{Z} := \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \leq 0 \leq \overline{\boldsymbol{a}}\}$ – нульсодержащие интервалы

$-\boldsymbol{P} := \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid -\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{P}\}$ – неположитедьные интервалы

$\boldsymbol{dual\ Z} := \{\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{KR} \mid \boldsymbol{dual} \in \boldsymbol{Z}\}$ – интервалы, содержащиеся в нуле

Таблица для операции умножение в интервальной арифметике Каухера

	$b \in P$	$b \in Z$	$b \in -P$	$b \in dual\ Z$
$a \in P$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}]$
$a \in Z$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}]$	$[\min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}]$	$[\overline{a}\underline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	0
$a \in -P$	$[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	$[\underline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\underline{b}]$	$[\overline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}]$
$a \in dual\ Z$	$[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}]$	0	$[\overline{a}\overline{b}, \underline{a}\overline{b}]$	$[\max\{\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}, \min\{\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\}]$

Структура, которая получила название системы правил нестандартной интервальной математики.

Обозначим $\boldsymbol{M} = \left(\boldsymbol{I}(\boldsymbol{R}), +, -, \times, /, +^{-}, -^{-}, \times^{-}, /^{-}\right)$,

где:

$I(R) = \{[a^{-}, a^{+}] \mid a^{-} \le a^{+}, a^{-}, a^{+} \in R\}$ - множество действительных интервалов;

$(+, -, \times, /)$ и

$(+^{-}, -^{-}, \times^{-}, /^{-})$ - стандартные и нестандартные интервальные операции сложения, вычитания, произведения и деления соответственно действительным интервалам.

Для программной реализации представим значения интервальных чисел ***A*** і ***B*** в форме центр-радиуса

$$\boldsymbol{A} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{r_a} \rangle, \quad \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{r_b} \rangle,$$ где:

$$a = \frac{\underline{a} + \overline{a}}{2}, \qquad r_a = \frac{\overline{a} - \underline{a}}{2}$$

$$b = \frac{\underline{b} + \overline{b}}{2}, \quad r_b = \frac{\overline{b} - \underline{b}}{2}$$

-центры и радиусы соответственно интервалов ***A*** і ***B***.

Нестандартные интервально-арифметические операции сложения и вычитания определяется так:

$$\boldsymbol{A} +^{-} \boldsymbol{B} = \left\langle \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, | \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{b}} | \right\rangle$$

$$\boldsymbol{A} -^{-} \boldsymbol{B} = \left\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, | \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{b}} | \right\rangle$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция произведения определяется так:

$$\boldsymbol{A} \times^{-} \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{ab} - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{ab}) \boldsymbol{r_a r_b}, | \boldsymbol{ar_b} - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{ab}) \boldsymbol{br_a} | \rangle$$

если $\frac{|a|}{r_a} \geq 1, \quad \frac{|b|}{r_b} \geq 1$

$$\boldsymbol{A} \times^{-} \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{ab} - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{b}) \boldsymbol{ar_b}, | \boldsymbol{br_a} - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{b}) \boldsymbol{r_a r_b} | \rangle$$

если $\frac{|a|}{r_a} < 1, \quad \frac{|a|}{r_a} < \frac{|b|}{r_b}$

$$\boldsymbol{A} \times^{-} \boldsymbol{B} = \langle \boldsymbol{ab} - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{br_b}, | \boldsymbol{ar_a} - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{a}) \boldsymbol{r_a r_b} | \rangle$$

если $\frac{|b|}{r_b} < 1, \quad \frac{|a|}{r_a} \geq \frac{|b|}{r_b}$

При умножении интервала на число применяется такое правило:

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{a} = \begin{cases} \left[\boldsymbol{\mu} \cdot \underline{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\mu} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}\right], \boldsymbol{если} \quad \boldsymbol{\mu} \geq 0, \\ \left[\boldsymbol{\mu} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{\mu} \cdot \underline{\boldsymbol{a}}\right], \boldsymbol{если} \quad \boldsymbol{\mu} < 0. \end{cases}$$

Нестандартная интервально-арифметическая операция деления определяется так:

$$\boldsymbol{A} /^{-} \boldsymbol{B} = \frac{1}{\boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{r}_b^2} \left\langle \boldsymbol{ab} - \mathrm{sgn}(\boldsymbol{ab}) \boldsymbol{r}_a \boldsymbol{r}_b, \left| \boldsymbol{a r}_b - \mathrm{sgn}(\boldsymbol{ab}) \boldsymbol{b r}_a \right| \right\rangle,$$

если $\frac{|b|}{r_b} > 1,\ \frac{|a|}{r_a} \geq 1$

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \left\langle ab - \mathrm{sgn}(b) a r_b, \left| b r_a - \mathrm{sgn}(b) r_a r_b \right| \right\rangle,$$

если $\frac{|b|}{r_b} > 1,\ \frac{|a|}{r_a} < 1$

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \left\langle ab - \mathrm{sgn}(a) b r_a, \left| a r_b - \mathrm{sgn}(a) r_a r_b \right| \right\rangle,$$

если $\frac{|b|}{r_b} < 1,\ \frac{|a|}{r_a} < 1$

При делении интервала на число применяется такое правило:

$$\boldsymbol{\mu}/\boldsymbol{a}=\begin{cases}\left[\boldsymbol{\mu}\cdot\dfrac{1}{\underline{\boldsymbol{a}}},\boldsymbol{\mu}\cdot\dfrac{1}{\overline{\boldsymbol{a}}}\right],\textit{если} \quad \mu\geq 0,\\ \left[\boldsymbol{\mu}\cdot\dfrac{1}{\overline{\boldsymbol{a}}},\boldsymbol{\mu}\cdot\dfrac{1}{\underline{\boldsymbol{a}}}\right],\textit{если} \quad \mu<0.\end{cases}$$